全國紙上数学談話会第233号

69. 調和函数ニ関スル二三ノ定理

鍋谷堅次郎（東北大）

先ニ私ハ"Remarks on some theorems concerning sections of a power series I and II"ニ於テ Landau ノ Ergebnisse, 2te Auf. (1929) ノ Erster Kapitel, §1 及ビ §2 ニ於ケル定理ヲ擴張シタ二三ノ定理ヲ与ヘマシタ。コレハ其中東北数学雑誌ニ発表サレルコトト思ヒマスガ、此處デハ Landau ノ本ノ Erstes Kapitel ニ於ケル一聯ノ定理ニ並行シテ調和函数ノ方デモ同様ノコトガ成立シマスカラ、ソノ中アマリ注意サレテ居ナイモノヲ述ベテ置キタク思ヒマス。

定理 1. $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ ヲ Klass L^p $(p\geqq 1)$ ニゾクスル函数 $f(x)$ ノ Fourier series トシ

$$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu\cos\nu x+b_\nu\sin\nu x),\quad n=0,1,2,\cdots$$

トスルトキハ

$$\int_0^{2\pi}\left|\frac{S_0(x)+S_1(x)+\cdots+S_n(x)}{n+1}\right|^p dx\leqq\int_0^{2\pi}|f(x)|^p dx$$

$$p\geqq 1,\quad n=0,1,2,\cdots\cdots$$

証明ハ Fourier 級数論ニ於ケル Fejér ノ積分

$$\frac{S_0(x)+S_1(x)+\cdots+S_n(x)}{n+1}=\frac{2}{\pi(n+1)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(x+2t)+f(x-2t)}{2}\left(\frac{\sin(n+1)t}{\sin t}\right)^2dt$$

ニ上ニ引用シタ推論ニ於ケルト同様ノ方法ヲ適用シテ得ラレマス。

$$\left(\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n}S_\nu(x)\right)^p=\frac{2}{\pi(n+1)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n}S_\nu(x)\right)^{p-1}\left(\frac{f(x+2t)+f(x-2t)}{2}\right)\left(\frac{\sin(n+1)t}{\sin t}\right)^2dt$$

デスカラ

$$\int_0^{2\pi}\left|\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n}S_\nu(x)\right|^p dx=\int_0^{2\pi}\frac{2}{\pi(n+1)}\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n}S_\nu(x)\right)^{p-1}\left(\frac{f(x+2t)+f(x-2t)}{2}\right)\left(\frac{\sin(n+1)t}{\sin t}\right)^2dt\right|dx$$

$$\leqq\int_0^{2\pi}\frac{2}{\pi(n+1)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\left(\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n}S_\nu(x)\right)^{p-1}\left(\frac{f(x+2t)+f(x-2t)}{2}\right)\right|\left(\frac{\sin(n+1)t}{\sin t}\right)^2dt\,dx$$

$$=\frac{2}{\pi(n+1)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\left|\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n}S_\nu(x)\right|^{p-1}\left|\frac{f(x+2t)+f(x-2t)}{2}\right|dx\left(\frac{\sin(n+1)t}{\sin t}\right)^2dt$$

$$\leqq\frac{2}{\pi(n+1)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{2\pi}\left|\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n}S_\nu(x)\right|^p dx\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_0^{2\pi}\left|\frac{f(x+2t)+f(x-2t)}{2}\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{\sin(n+1)t}{\sin t}\right)^2dt$$

$$\leqq\frac{2}{\pi(n+1)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{2\pi}\left|\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n}S_\nu(x)\right|^p dx\right)^{\frac{p-1}{p}}\left\{\left(\int_0^{2\pi}\left|\frac{f(x+2t)}{2}\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_0^{2\pi}\left|\frac{f(x-2t)}{2}\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\right\}\left(\frac{\sin(n+1)t}{\sin t}\right)^2dt$$

$$=\frac{2}{\pi(n+1)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{2\pi}\left|\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n}S_\nu(x)\right|^p dx\right)^{\frac{p-1}{p}}2\left(\int_0^{2\pi}\left|\frac{f(x)}{2}\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{\sin(n+1)t}{\sin t}\right)^2dt$$

$$=\left(\int_0^{2\pi}\left|\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n}S_\nu(x)\right|^p dx\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_0^{2\pi}|f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\frac{2}{\pi(n+1)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin(n+1)t}{\sin t}\right)^2dt$$

$$=\left(\int_0^{2\pi}\left|\frac{1}{n+1}\sum S_\nu(x)\right|^p dx\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_0^{2\pi}|f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

故ニ

$$\left(\int_0^{2\pi}\left|\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n}S_\nu(x)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\leqq\left(\int_0^{2\pi}|f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

定理2. $u(r,\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta)r^n$

ヲ $|z|<1$ $(z=re^{i\theta})$ ニ於ケル調和函数トシ

$$S_n(r,\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu\cos\nu\theta+b_\nu\sin\nu\theta),\quad n=0,1,2,\cdots$$

トスレバ

$$\int_0^{2\pi}\left|S_n\left(\frac{r}{2},\theta\right)\right|^p d\theta\leqq\int_0^{2\pi}|u(r,\theta)|^p d\theta,\quad p>1,\ n=0,1,2,\cdots$$

此ノ定理2,及ビ次ニ述ベル定理3,4ノ証明ハココニハ略シマス。ニ
＝引用シタ論文或ハLandauノ本ヲ参照サレルト容易ニワカリマス。

定理3　$u(r,\theta)$ ヲ前定理ニ於ケルト同様ノ函数ニシ更ニ

$$|u(r,\theta)|\le 1,\quad 0<r<1,\ 0\le\theta<2\pi$$

$$\mathfrak{M}(r)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)r^n$$

トスレバ $\mathfrak{M}(r)=o\left(\frac{1}{\sqrt{1-r}}\right)$

定理4　$u(r,\theta)$ ハ前定理ト同様トシ

$$\mathfrak{M}(r)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}|a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta|r^n$$

トスルト $\mathfrak{M}(\vartheta)\le 1$ ナルヨウナ $u(r,\theta)$ ニ無関係ナ常数 ϑ ガ存在シタ. $\vartheta=\frac{1}{3}$ デ之ヨリハ大キク出来ナイ。

次ニ上ニ引用シタ拙論ニ於ケル定理1

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$$

ヲ $|x|<1$ デ正則トシ $S_n(x)=\sum_{\nu=0}^{n}a_\nu x^\nu$, $n=0,1,2,\cdots$ トスルトキハ $p\ge 1$ ニ対シテ

$$\int_0^{2\pi}\left|\frac{S_0(x)+\cdots+S_n(x)}{n+1}\right|^p d\theta\le\int_0^{2\pi}|f(x)|^p d\theta,\quad x=re^{i\theta},\ n=0,1,2,$$

ニ対シテ私ハ等号ガ成立スルノハ $f(x)$ ガ常数ノトキニ限ルコトヲ示シマシタガソノ証明ニ

$$\frac{1}{x^n}(1+x+\cdots+x^n)^2$$

ガ $|x|=1$ ニ対シテ常ニ一定ノ amplitude ヲ有スルトイフ性質ヲ用ヒマシタ。コノ性質ノ証明ヲ二ツ述ベマシタガ書キレマ時間不足ノ為

迂遠デアリマシタ。次ノ様ニシタ方ガ適切デアルト思ヒマス。

$$\frac{1}{x^n}(1+x+\cdots+x^n)^2=\left(\frac{1}{x^n}+\frac{1}{x^{n-1}}+\cdots+1\right)(1+x+\cdots+x^n)$$

$$=\overline{(1+x+\cdots+x^n)}\,(1+x+\cdots+x^n)=\left|(1+x+\cdots+x^n)\right|^2$$

右辺ハrealデスカラ一定ノamplitudeヲモチマス。

(12, 11 受取)

<u>補遺</u> ―有理型函数ノderivativeニツイテ。吉田耕作。

21号ノ<u>定理</u>ハ次ノ様ニ拡ゲラレマス。証明略図シマス。

$y=f(x)$ノ逆函数 $x=g(y)$ ノRiemann面F_yニ於テ$|y|<\delta$ナル円ヲ切ルトキ切ラレタモノガ全テ$y=0$ノミヲsingularityニスルナラバ

$$\sum\frac{1}{|x_i|^{2+\varepsilon}\left|\sqrt[n_i]{c_i}\right|^2}=\text{convergent for } \varepsilon>0$$

但シ$x_1, x_2, \cdots$ハ$f(x)$ノ0-point (without multiplicity)

又x_iノ近傍ニ於ケルTaylor展開ハ$f(x)=c_i(x-x_i)^{n_i}+\cdots\cdots$

$n_i\geqq 0$, $c_i\neq 0$。

之ニヨレバ特別ナ場合ノdomaine de determination 0 de $f(x)$内ニ於ケル$f(x)$ノ行動($x=\infty$ノ近傍ニ於ケル)ニツイテノ議論ガデキマス。併シ筆者ノ欲シイノハ一般ニF_yノpoint trancendentノ近傍ニ於ケル$f'(x)$ノ状態ヲ精シク調ベタイノデス。

―― 正誤 ――

第23号、69「調和函数ニ関スル二三ノ定理」デハ定理1ノ他ハ全部証明ヲ略シマシタガ、之ハ次ノ機会ニシテベタ文献ノ主ナルモノト併セテ何処カヘ発表スル積リデス。実函数論ノ知識ニ乏シク、又引用シタ "Remarks on some theorems concerning sections of a power series I and II" ニ於テモ、唯 Landau ノ本ヲ ergänzen スル意味デ書イタモノデ文献ハ全然アゲマセンデシタ。此ノ論文ノ出来タ動機ハ談話会デ高見穎様ノ代数曲線ニ関スル御研究ヲ伺イテ居ル中ニ拾ッタモノデス。次ニ先日寄稿シタ「星型描寫ニ就テ」ノ中ノ Study ノ定理ノ擴張ニ就テハ淡中君ノ御意見ヲ仰イダコトガアッタコトモ附ケ加ヘネバナリマセン。―― 鍋谷堅次郎